Quand la forme devient fractale

Enka Blanchard, Andreï Rodin et Florentin Waligorski

Chercheuse transdisciplinaire au CNRS
Philosophe-mathématicien
Traducteur scientifique

Les objets géométriques habituels comme les cercles, triangles, polygones, polyèdres…, ont une propriété simple en commun : les plus petites parties de ces objets sont « plus simples » que ne le sont les plus grandes (ou l'objet éléments « plus simples » que le triangle lui-même. Les sommets du triangle sont eux-mêmes des points, qui sont tous semblables et *« n'ont pas de parties »*, comme le disait Euclide ; de fait, ils n'ont pas de structure interne. Ainsi, les points sont des atomes géométriques primitifs qui, malgré leur « simplicité », permettent une impressionnante variété de formes géométriques.

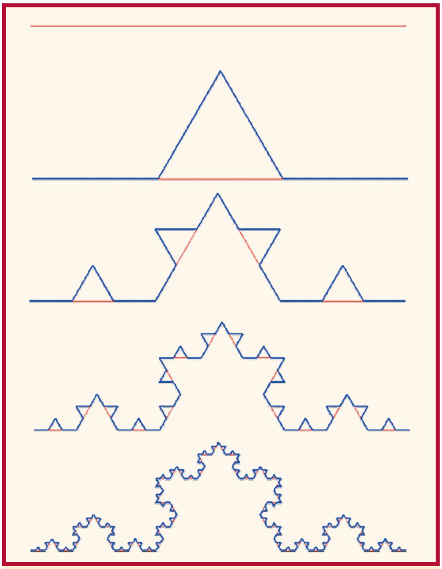
Le monde et sa complexité face à l'hypothèse atomiste

La question est de savoir comment nos outils mathématiques peuvent appréhender la complexité de la Nature, qui s'étend aussi bien aux grandes qu'aux petites échelles. On pourrait au départ supposer que cette complexité se réduit, aux plus petites échelles, à quelque chose d'aussi simple que l'ensemble des atomes ou que les lettres d'un alphabet, comme conceptualisé par Démocrite, ce philosophe grec du V^{e} siècle avant notre ère connu comme l'inventeur du concept d'atome. Nous voyons cependant une régularité et des motifs dans le monde qui nous entoure et il semble naïf de le réduire à une collection d'atomes individuels et indépendants.

En gardant la question atomiste en tête, posons-nous une question plus pratique : quelle est la longueur des côtes de la Grande-Bretagne ? Le mathématicien polono-franco-américain Benoît Mandelbrot (1924–2010) s'est posé cette question et a apporté une réponse plutôt inattendue dans un article fondateur datant de 1967. D'abord, il remarqua que différentes sources officielles fournissaient des valeurs assez différentes. Ensuite, il comprit la raison de cette divergence, qui était en fait plutôt évidente : le résultat des mesures, dans ce cas, dépend de l'échelle qui définit quels détails de la côte sont observés et lesquels sont ignorés. Plus la côte est connue avec une grande précision, plus la courbe résultante « fait des zigzags » et plus la mesure de sa longueur augmente. Nous avons alors un contre-exemple à l'intuition commune selon laquelle des mesures répétées avec des instruments de plus en plus précis permettront de converger vers une valeur limite « vrai ». Cette intuition est généralement utile, surtout lorsque l'on a affaire à des courbes « isses », comme un cercle. L'approximation de sa circonférence peut aussi être réalisée par le périmètre inscrit (ou circonscrit) de polygones réguliers dont le nombre de côtés croît. Ces mesures itérées convergent bien (et permirent les premières approximations de π).

Pour la côte cependant, alors que de plus en plus de détails fins sont trouvés à toutes échelles (théoriquement, même jusqu'au niveau moléculaire), la longueur mesurée ne peut pas être bornée ; en d'autres termes, elle tend vers l'infini.

Un objet extraordinaire : le flocon de von Koch



Les quatre premières étapes de la construction (sur l'un des trois côtés du triangle équilatéral).

Considérons maintenant un exemple différent, une des premières fractales étudiées : le *flocon de von Koch*, construit en 1904 par le mathématicien suédois Helge von Koch (1870 – 1924). Prenons un triangle équilatéral et divisons en trois parties égales chacun de ses trois côtés. Remplaçons chaque segment central par un « cône » dont les deux segments ont la longueur du segment retiré. Continuons de cette manière avec chaque côté (ou segment linéaire) du polygone (non convexe) ainsi obtenu : on le divise en trois parties égales, etc. Comme limite à ce processus, on obtient une « forme » délimitée par une courbe qui est « partout barbelée ». Le périmètre de la figure limite obtenue est infini (alors que la figure entière est contenue dans un cercle de rayon fini) : en effet, son périmètre augmente de 1/3 à chaque étape de la procédure de construction, ce qui le rend visiblement non borné. Malgré sa complexité, l'infographie standard permet de représenter cette courbe (jusqu'au niveau du point d'encre) de manière satisfaisante pour la plupart des besoins. Helge von Koch a introduit cet objet comme un exemple de courbe qui est continue partout mais différentiable nulle part (c'est-à-dire qu'en aucun de ses points la courbe n'admet de droite tangente). Le flocon était conçu comme un exemple permettant de dissocier le concept de continuité de celui de différentiabilité. Benoît Mandelbrot a eu la grande intuition que de telles constructions mathématiques peuvent également être utilisées pour modéliser des phénomènes naturels ou technologiques, y compris des processus très élémentaires… comme la mesure de la longueur d'une côte. Le flocon de von Koch possède cette propriété : la complexité de la construction ne diminue pas à des échelles plus petites mais reste exactement la même (c'est *l'auto-similarité*). Une telle invariance de la complexité à toutes les échelles n'est pas une règle générale dans la nature, mais la réduction de la complexité à des échelles plus petites n'est pas non plus une loi universelle. Les constructions géométriques infinies de ce type sont donc légitimes, et Mandelbrot les a appelées fractales.

L'imagerie informatique a joué un rôle important dans le changement de point de vue sur ces objets qui étaient auparavant considérés comme des « monstres mathématiques ». Dans le livre de Mandelbrot de 1982, *The Fractal Geometry of Nature* (W.H. Freeman and Co.), on trouve de nombreuses images de fractales générées par ordinateur, qui ont l'air étonnamment douces et imitent des paysages naturels, des plantes, des nuages…

Des objets qui questionnent certaines notions « intuitives »

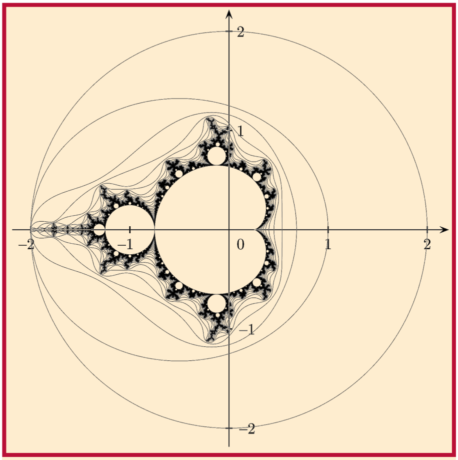
Les fractales sont appelées ainsi en particulier en raison de la « dimension de Hausdorff », d'après le mathématicien allemand Felix Hausdorff (1868 – 1942) qui a introduit ce concept pour la première fois en 1918. Les dimensions de Hausdorff des formes fractales prennent en effet des valeurs qui font naturellement intervenir des fractions de nombres réels. La notion habituelle de « dimension » est celle de la dimension topologique, définie comme suit. Fixons la dimension (topologique) d'un point à 0, et la dimension topologique d'une ligne (continue mais pas nécessairement droite) à 1. En général, le « bord » d'une ligne (si elle a un bord) est un point. Par exemple, un segment de droite [AB] a deux « bords », qui sont ses extrémités A et B. Cela permet de définir la dimension topologique de manière inductive : un objet de dimension n aura un bord de dimension $n-1$. Par exemple, le bord d'un disque (qui est une surface en 2D) sera le cercle (de dimension 1). Le bord d'une boule pleine (solide 3D) sera la sphère (surface 2D).

Cette définition en rejoint une deuxième, basée sur le concept de mesure. Si l'on prend un segment et que l'on double sa longueur, le segment final aura bien deux fois la longueur initiale. Cependant, si l'on prend un carré et que l'on double la longueur d'un côté, la surface du carré sera multipliée par 4, et le volume du cube correspondant sera multiplié par 8. Cela donne une idée de la relation entre la mesure et la dimension topologique : l'exposant est égal à la dimension topologique de l'objet géométrique correspondant.
On pourrait s'aventurer à imaginer que la même règle s'applique universellement à toutes sortes d'objets géométriques. Mais en fait, une telle conjecture serait fausse, et les fractales, à commencer par le flocon de von Koch, en sont des contre-exemples. Pour s'en convaincre, on remarque déjà que le flocon de Koch est une ligne continue : le processus (infini) de sa construction ne rompt pas sa continuité. Il a donc une dimension topologique égale à 1.
Voyons cependant ce qu'il advient de sa « longueur » lorsqu'elle est mise à l'échelle. Puisque la « longueur » totale du Flocon de Koch est infinie, le problème est délicat… Essayons plutôt de comparer les rapports entre certains éléments spécialement choisis de notre construction, qui restent finis. Considérons alors un « côté » du flocon complet, dont on appelle P et Q les deux extrémités. Comme le nombre d'itérations est infini, si l'on prend la figure entre P et le point situé au tiers de [PQ], on retrouve exactement la même figure, à un facteur d'échelle près. En « zoomant » (ou « dézoomant ») avec un facteur 3, on retombe donc sur la figure originale (c'est l'auto-similarité). En faisant grossir l'image par un facteur 3, on obtient donc quatre figures, chacune « identique » (en fait, isométrique) à l'originale. Ce comportement ne correspond donc pas à ce que l'on attendrait de la dimension topologique : l'exposant x correspondant devrait être tel que $3^x = 4$. Un élément les relie cependant : ce nombre (*dimension de Hausdorff*) est bien compris entre la dimension topologique d'une ligne et celle d'une surface.

On trouve π dans l'ensemble de Mandelbrot !

Prenons désormais un exemple plus élaboré, aux propriétés étonnantes, découvert au début du XX^e^ siècle par Gaston Julia (1893–1978) et Pierre Fatou (1878–1929), et nommé en hommage à Benoît Mandelbrot. Il s'agit d'une partie du plan complexe, correspondant à l'ensemble des points C pour lesquels la suite récurrente définie par $Z_{n+1} = Z_n^2 + C$, avec $Z_0 = 0$ et $C = a + bi$, est bornée. Visuellement, on peut y voir une cardioïde principale, elle-même surmontée par des « bourgeons » circulaires portant des « antennes » très ramifiées.

Une première propriété est qu'un point appartient à l'ensemble de Mandelbrot si, et seulement si, le module des nombres complexes $|Z_n|$ qui lui sont associés est inférieur à 2, pour tout entier n. Les lectrices et les lecteurs familiers des nombres complexes et de la récurrence sont invités à établir ce résultat ! Attaquons-nous désormais à une deuxième propriété étrange et peu connue : π se retrouve naturellement, et de plusieurs manières, dans l'ensemble de Mandelbrot.



L'ensemble de Mandelbrot.

©*Geek3, 2009*

Plaçons-nous d'abord au niveau du point de rebroussement $C_0 = 0{,}25 + 0i$, de coordonnées $(0{,}25\,;0)$. D'après la relation $Z_{n+1} = Z_n^2 + C_0$, avec $Z_0 = 0$, et une récurrence élémentaire, les nombres complexes Z_n (avec $n \geq 0$) sont en fait tous des nombres réels et inférieurs à 0,5. Ainsi, C_0 appartient à l'ensemble de Mandelbrot. Mais que se passe-t-il « autour » du point C_0 ? Pour le savoir, considérons des points $C_\varepsilon = 0{,}25 + \varepsilon + 0i$, de coordonnées $(0{,}25 + \varepsilon\,;0)$, avec $\varepsilon > 0$.

On observe que les nombres complexes Z_n associés à C_ε finissent tous par diverger, quelle que soit la valeur de $\varepsilon > 0$. En outre, plus ε est grand, moins il faudra d'itérations pour que les modules de Z_n deviennent supérieurs à 2. Au contraire, plus ε se rapproche de 0, plus il faudra d'itérations. On aperçoit des décimales bien connues apparaître une ligne sur deux…
Des calculs extrêmement fastidieux permettent d'obtenir une relation simple entre ε et $N(C_\varepsilon)$, à savoir $N(C_\varepsilon) = \dfrac{\pi}{\sqrt{\varepsilon}}$

ε	C_ε	$N(C_\varepsilon)$
1,0	1,25	2
0,1	0,35	8
0,01	0,26	**30**
0,001	0,251	97
0,0001	0,2501	**312**
0,00001	0,25001	991
0,000001	0,250001	**3140**
0,0000001	0,2500001	9933
0,00000001	0,25000001	**31414**
0,000000001	0,250000001	99344
0,0000000001	0,2500000001	**314157**

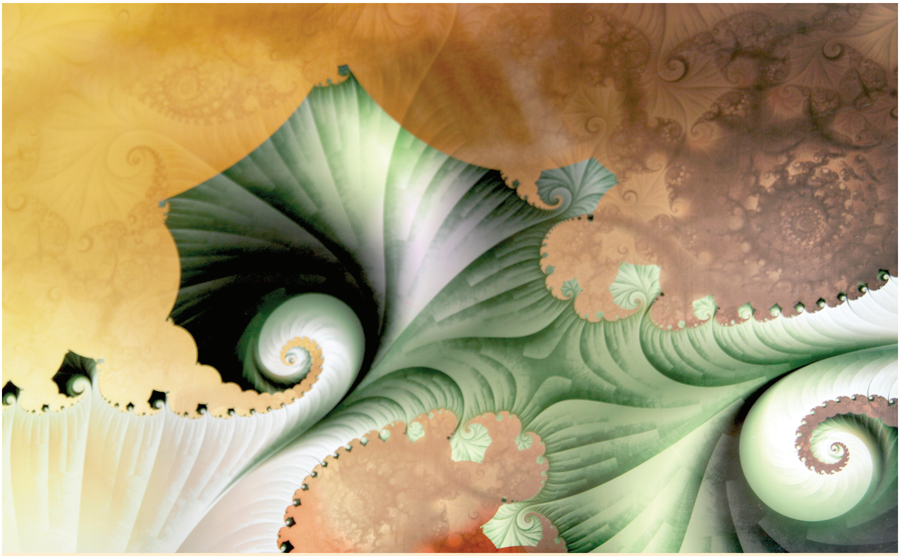
Nombre n = N(Cε) d'itérations avant que le module de Zn ne devienne supérieur à 2.

©*F.W, 2022*

À la place de calculer le périmètre de polygones, on pourrait approximer π de cette manière ! Il existe heureusement des méthodes beaucoup plus efficaces.

Le nombre π apparaît à d'autres endroits dans l'ensemble de Mandelbrot. Au moins trois points distincts (à symétrie près) font ainsi apparaître le nombre préféré des mathématiciens ; il est conjecturé qu'une infinité de tels points existe. Il est même possible de faire le lien avec la suite de Fibonacci (qui se retrouve dans les bourgeons de l'ensemble de Mandelbrot) ! Décidément, les fractales, π et la suite de Fibonacci sont loin d'avoir livré tous leurs secrets.

E.B., A.R. & F.W.



Détail d'une œuvre fractale (non documentée) hommage à Benoît Mandelbrot.

Photo : É.T., 2010 (Hyderabad, Inde)

Pour en savoir (*un peu*) plus

« Pi and the Mandelbrot set. » Numberphile, vidéo de Brady Haran, 8 min, 2016, disponible en ligne (en anglais).

« Fibonacci numbers hidden in the Mandelbrot set. » Numberphile, vidéo de Brady Haran, 10 min, 2018, disponible en ligne (en anglais).

Le fascinant nombre π. Jean-Paul Delhaye, Belin, 2018.

On the validity of fractal dimension measurements in image analysis. Pierre Soille et Jean-François Rivest, Journal of visual communication and image representation 7, 1996.