par Nicolas K. Blanchard

De Poincaré à Perelman : une grande épopée mathématique

La conjecture de Poincaré a attendu cent ans avant d'être résolue. On sait désormais que tout objet ressemblant à un espace euclidien à trois dimension peut se déformer pour obtenir une 3-sphère. Retour sur une épopée mathématique de longue haleine.

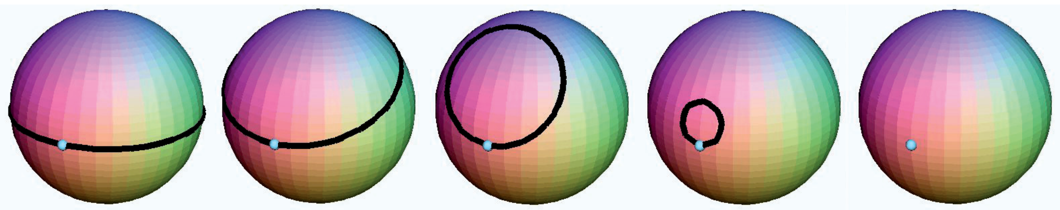
Au tout début du XX^e^ siècle, travaillant sur les bases de ce qui est aujourd'hui la topologie algébrique, Henri Poincaré essaye de caractériser différents objets topologiques. Ainsi, distinguer un plan de la surface d'une sphère est intuitivement facile, mais distinguer leurs analogues dans des dimensions supérieures pose problème. Ayant crée avec Enrico Betti la notion d'homologie puis celle de groupe fondamental, il conjecture que ces deux concepts sont suffisants pour distinguer ces objets en dimension 3. Il faudra toutefois attendre plus de cent ans pour que Grigori Perelman apporte les derniers éléments nécessaires à la preuve.

Les *n*-sphères

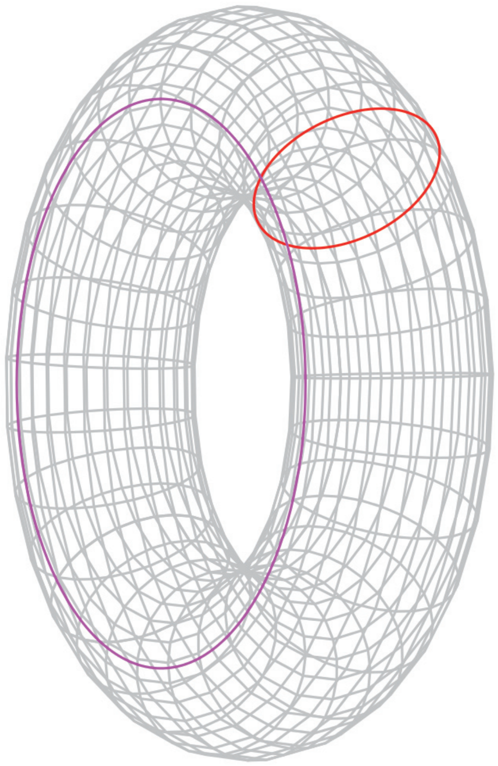
Une sphère en mathématique est composée d'un centre C et d'un rayon *r*. Elle correspond à tous les points à distance *r* de C. La 1-sphère correspond au cercle, car elle a une dimension, un degré de liberté (c'est une ligne déformée). Une 2-sphère correspond à nos sphères usuelles ; elle possède deux degrés de libertés. Une *n*-sphère correspond à sa généralisation à *n* dimensions. La surface de la Terre est 2-dimensionnelle, on ne peut pas bien se la représenter sur un plan. De même, la 3-sphère ne peut pas être dessinée sans avoir accès à un espace de dimension 4.

+ Des surfaces et des trous

Imaginons une fourmi se déplaçant tout droit sur ce qu'elle perçoit comme un plan. Si elle revient un jour au point de départ, c'est qu'elle n'était visiblement pas sur un plan mais par exemple sur un ballon. Même si les deux sont fondamentalement différents, il n'est pas évident de savoir sur lequel on se trouve, ou si par exemple on se trouve sur un bretzel. La *topologie* est l'étude de ces surfaces, et des différences entre un plan, une sphère, un beignet, ou d'autres objets plus complexes en dimensions plus élevées. Cependant, dans ce cadre, ni la taille du beignet ni son fourrage ne nous intéressent, on ne regarde que sa surface, en la déformant si nécessaire. Une sphère n'est pas fondamentalement différente d'un cube car on peut déformer l'un de manière continue (c'est-à-dire étirer et contracter des morceaux) pour obtenir l'autre. Par contre, il est impossible de déformer une sphère pour avoir un bretzel : on sera obligé de couper un morceau et de le recoller ailleurs. On appelle *connexe* une surface où on peut aller de tout point vers tout autre point. Une propriété plus forte est la *simple connexité* : cela correspond à pouvoir prendre un *lacet* (une courbe qui ne se croise pas elle-même et revient à son point de départ) et à pouvoir le déformer jusqu'à obtenir un point. Si cette propriété est vérifiée par la sphère et le plan, il n'en est pas de même du *tore* (le bretzel à un trou). La simple connexité permet ainsi de distinguer la sphère du tore, mais elle ne permet pas de distinguer les tores à deux trous de ceux à trois trous (ils sont tous connexes et non simplement connexes). Enfin, pour ne pas s'embarrasser de cylindres ou de plans infinis, on peut exiger une condition supplémentaire : on veut que la surface soit « fermée » : dit grossièrement, qu'elle soit plutôt régulière, n'ait pas de bords et soit bornée.



La sphère est simplement connexe : tout lacet tracé sur sa surface peut être contracté en un point.



Le tore n'est pas simplement connexe : aucun des deux lacets ne peut se contracter de manière continue en un point.

Des graphes à la rescousse

Avant même que les objets topologiques introduits par Poincaré soient imaginés, une question existait en théorie des graphes : quels sont les graphes que l'on peut dessiner dans le plan sans croiser les lignes (voir *les Graphes*, Bibliothèque Tangente 54, 2015) ? Après la résolution du problème par Kazimierz Kuratowski en 1930, on comprend qu'il était possible de distinguer un tore d'une sphère en regardant si on peut dessiner $K_{3,3}$ (le graphe de l'énigme des trois maisons à relier aux réseaux d'eau, de gaz et d'électricité) dedans. On a même mieux : si deux surfaces ont un « nombre de trous » différents, on trouvera un graphe qui pourra être dessiné sur l'une mais pas sur l'autre. Trouver ce graphe cependant est loin d'être trivial, et si ceux qui ne se dessinent pas dans le plan sont simples (ils ne contiennent pas les deux graphes interdits K_5 et $K_{3,3}$ comme mineurs), ceux qui ne se dessinent pas sur le tore ne sont pas encore complètement caractérisés et ont déjà plus de dix mille graphes interdits !

L'énoncé de ce qui est connu comme la conjecture de Poincaré est relativement court : toute 3-variété fermée, orientable et simplement connexe est homéomorphe à la 3-sphère. En langage moins spécialisé, cela veut dire que tout objet ressemblant à un espace euclidien à trois dimension mais étant fermé peut se déformer pour obtenir une 3-sphère (voir en encadré). C'est aussi une conséquence d'une ambitieuse conjecture de William Thurston (1946–2012), qui énonce que toute 3-variété fermée peut être « décomposée » de manière unique à partir de morceaux de huit types possibles (comme un entier peut se décomposer en un unique produit de nombre premiers). Comme cela caractérise toutes les 3-variétés fermées, et qu'il existe un unique objet construit ainsi qui soit simplement connexe, cet objet doit être la sphère et la conjecture de Poincaré en découle.
Pour attaquer ce genre de problème, on ne peut plus se contenter d'outils élémentaires comme les graphes ou la connexité et on doit se permettre de faire des calculs plus complexe, en utilisant des outils géométriques et analytiques.

+ Déformations de surface

Pour prouver la conjecture de Thurston, il suffit de montrer que la procédure de décomposition aboutit toujours et ne produit que des objets des huit types annoncés. Faire cela à la main est impossible, et c'est là que le programme d'un autre mathématicien américain, Richard Hamilton, entre en jeu. On peut essayer de déformer notre surface de manière à obtenir automatiquement cette décomposition. Cela correspond à calculer un *flot de Ricci*, qui déforme peu à peu en chaque point la surface en le déplaçant dans le sens de la courbure et donc en « aplatissant » en quelque sorte la surface, et en coupant–rebouchant parfois celle-ci en plusieurs morceaux (ce processus est appelé *chirurgie*). Une fois que ce processus termine, on a bien la décomposition attendue. Il restait cependant un trou dans la preuve : durant ce processus, le fait de couper une surface en plusieurs bouts peut introduire des singularités. C'est là que le mathématicien russe Grigori Perelman apporte sa contribution en mettant au point un outil permettant de faire de la chirurgie, c'est-à-dire de recoller les différents bouts de la surface. Il montre en outre que ces singularités n'arrivent qu'en nombre fini pour chaque intervalle de temps, qu'on peut donc en quelque sorte les traiter « à la main ». Avec ce tour de force technique, il apporte sa pierre finale à un édifice résolvant un problème vieux de plus d'un siècle.

Si Perelman apporte en 2003 une solution complète à la conjecture de Thurston, et donc à celle de Poincaré, il est loin d'être le seul à s'y être attaqué. Après son énoncé par Henri Poincaré, le premier vrai pas en avant (si l'on ignore une preuve annoncée puis rétractée par Henry Whitehead en 1934) est effectué par Stephen Smale en 1961 : il montre que la conjecture est vraie dans les n-variétés, pour $n \geq 7$, puis $n \geq 5$. Michael Freedman résout le problème pour les 4-variétés en 1986 ; il ne reste plus alors que le cas $n = 3$.
D'un autre côté, William Thurston travaillait sur un problème plus vaste : la conjecture de géométrisation. Ce fut au tour de Richard Hamilton de pro-

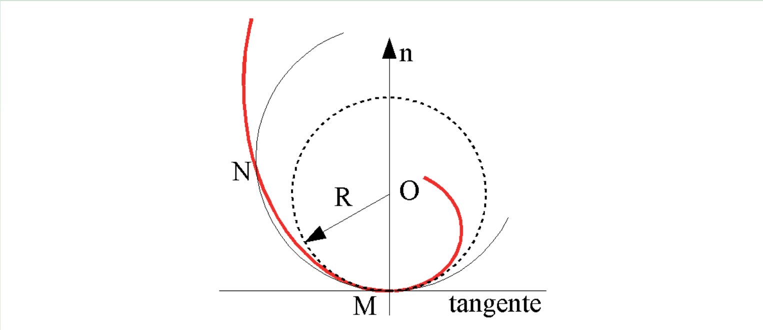
Société Mathématique de France

Ce texte est issu de la conférence donnée par Gérard Besson le mercredi 11 février 2015 à la Bibliothèque nationale de France, dans le cadre du cycle « Un texte, un mathématicien ».

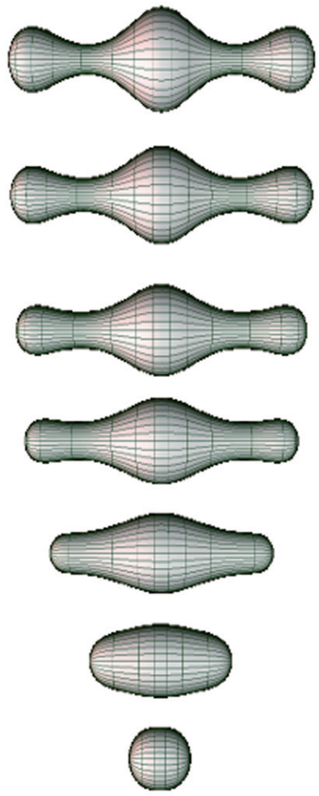
Gérard Besson est directeur de recherches CNRS à l'Institut Fourier de l'université de Grenoble.

La notion de courbure

La courbure représente à quel point une surface est « proche » d'un plan (qui est la seule surface ayant partout une courbure nulle). Elle peut se définir en comparant la surface d'un carré infiniment petit sur la surface à celle d'un carré équivalent sur le plan, ou bien en regardant la somme des angles d'un triangle. Sur le plan, on sait bien que cette somme vaut toujours 180°, mais il se trouve que sur une sphère cette somme est strictement supérieure, allant jusqu'à 540°, alors que sur une surface hyperbolique (comme une selle de cheval) elle est strictement inférieure, et arbitrairement proche de 0°. Les choses sont plus simples en deux dimensions : si on prend un point d'une courbe et que l'on trace un cercle longeant la courbe en ce point (le *cercle osculateur*), la courbure en ce point est inversement proportionnelle au rayon du cercle.
Toute surface à deux dimensions est forcément d'un de ces trois types (plat, sphérique ou hyperbolique). En trois dimensions, les choses se compliquent et de nouvelles géométries apparaissent pour atteindre un total de huit, correspondant aux huit types de la conjecture de Thurston. La situation reste mystérieuse dans les dimensions supérieures.



Le cercle osculateur (en pointillés, de centre O et de rayon R) est parmi tous les cercles tangents celui qui épouse le mieux la courbe rouge en un point M donné. La courbure est par définition l'inverse du rayon du cercle osculateur.



Le flot de Ricci appliqué à la forme du haut va produire ici une sphère (en bas). Il aurait pu arriver que la surface (du haut) se trouve séparée en trois composantes, auquel cas une procédure de chirurgie aurait été nécessaire.

poser un programme qui permettrait de prouver cette dernière, en introduisant les flots de Ricci. Il restait le problème de la chirurgie, que résolut brillamment Perelman dans les trois articles qu'il mit en ligne en 2002 et 2003, passant outre les méthodes de publications traditionnelles.

Durant cette épopée, de nombreux prix furent décernés, dont deux médailles Fields (à Thurston et à Freedman) ; en 2006, Perelman refuse la médaille Fields qui lui revient, puis le prix Clay, et plusieurs autres, citant entre autres le fait que Hamilton avait contribué autant que lui, sans pour autant avoir été nominé. Il se retire alors presque entièrement du monde des mathématiques.

N. K. B.

RÉFÉRENCES

- *Le topologicon*. Jean-Pierre Petit, Belin, 1999 (disponible en ligne).
- *Le géométricon*. Jean-Pierre Petit, Belin, 2000 (disponible en ligne).
- *Maryam Mirzakhani, l'arpenteuse de surfaces*. *Tangente* 162, 2015.
- *Hamilton's Ricci Flow*. Nick Sheridan, thèse de doctorat, université de Malbourne, 2006 (disponible en ligne).