001-100 BIB 54:Bibliotheque 54 29/6/15 09:57 Page 62

par Nicolas K. Blanchard

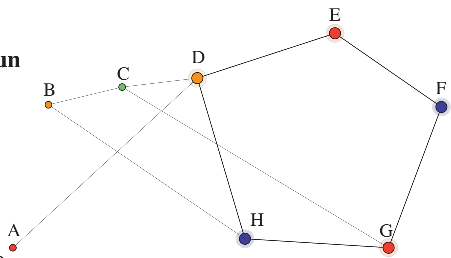
Le théorème des graphes parfaits

L'un des plus spectaculaires résultats mathématiques de ces dernières années est un théorème permettant de caractériser de manière « simple » la structure de toute une classe de graphes. Les grandes lignes de la démonstration permettent d'introduire de nombreuses familles de graphes.

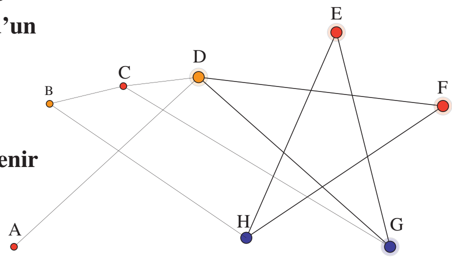
Le *théorème des graphes parfaits* est un important résultat qui relie les graphes parfaits (une classe de graphes définie à partir de propriétés de coloriage) à des propriétés simples de structure. Il énonce qu'un graphe est parfait si, et seulement si, il ne possède ni « trou » ni « antitrou ». Conjecturé par Claude Berge en 1961, il faudra attendre plus de quarante ans pour que Maria Chudnovsky, Neil Robertson, Paul Seymour et Robin Thomas annoncent une preuve, qu'ils publieront en 2006. Leur démonstration apporte aussi des nouveaux outils algorithmiques permettant de reconnaître ces graphes rapidement en pratique. Ce résultat fait suite au théorème *faible* des graphes parfaits, lui aussi conjecturé par Claude Berge. Il sera prouvé par László Lovász en 1972 et conduira à la première caractérisation de ces graphes :

Tout graphe est parfait si, et seulement si, son complémentaire est parfait.

La courte preuve consiste a remplacer certains sommets par des cliques (une *clique* est un graphe dans lequel toute paire de sommets est reliée par une arête), ce qui ne change pas le caractère parfait du graphe. La taille des cliques est choisie en fonction des ensemble indépendants maximums pour construire un deuxième graphe dont il est facile de démontrer que le complémentaire est parfait, et que la réduction au complémentaire du graphe original ne change pas cette perfection. On le voit, des notions assez techniques interviennent dans la démonstration ! Passons-les en revue.



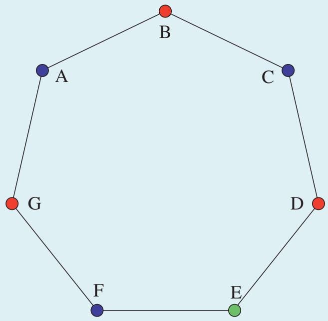
Les sommets DEFGH forment un cycle induit de longueur 5, donc un trou, et le graphe n'est pas parfait.



Les sommets DEFGH forment un antitrou, soit le complémentaire d'un trou (c'est-à-dire qu'il suffit de rajouter le cycle DEFGH pour obtenir une clique). Le graphe n'est donc pas parfait.

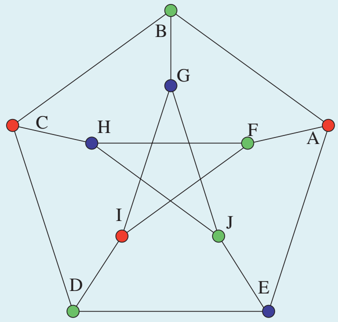
Le nombre chromatique

L'un des domaines les plus anciens et les plus étudiés de la théorie des graphes concerne la coloration. Le théorème des quatre couleurs, par exemple, énonce que l'on peut colorier tous les sommets d'un graphe planaire avec seulement quatre couleurs. Un problème naturel est de déterminer le nombre minimal de couleurs nécessaires pour colorier un graphe G (qu'il soit planaire ou non) sans que deux sommets adjacents soient coloriés de la même manière. Ce nombre, noté $\chi(G)$, s'appelle *nombre chromatique* du graphe G. Trouver le nombre chromatique d'un graphe quelconque est non seulement une question NP-complète dans le cas général, mais même le fait de décider si $\chi(G) = 3$ est déjà un problème NP-complet.
Plusieurs résultats partiels existent cependant : on sait déjà que $\chi(G)$ est inférieur au degré maximal $\Delta(G)$ plus 1. (Le *degré maximal* d'un graphe G est le maximum des degrés de ses sommets.) Le résultat se prouve facilement : on colorie les sommets un par un, dans n'importe quel ordre, et vu qu'ils n'ont au plus que $\Delta(G)$ voisins, donc $\Delta(G)$ couleurs interdites, on peut toujours trouver une couleur à assigner à tout sommet.

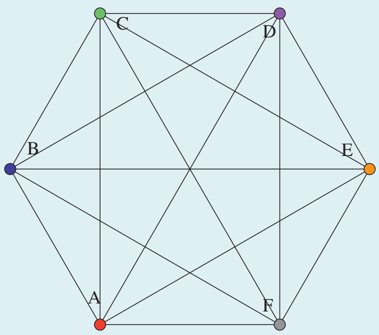


Trois couleurs sont nécessaires pour colorier n'importe quel cycle de longueur impaire. Ici, l'exemple de C_7 : chaque sommet a un degré égal à 2, mais il faut bien trois couleurs pour le colorier car le cycle est de longueur impaire.

En bas, une coloration minimale du graphe de Petersen. On n'a besoin que de trois couleurs, bien qu'il ne soit pas planaire (et donc assez complexe).



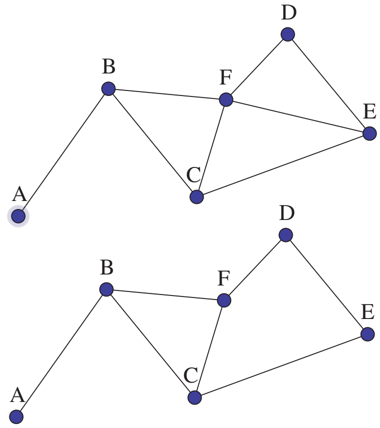
Ensuite, on sait qu'une clique de taille n (on la notera K_n) nécessite exactement n couleurs.
Une conjecture fameuse porte justement sur ce sujet. Nommée *conjecture de Hadwiger*, elle est une des plus anciennes du domaine. Elle postule que tout graphe possède un nombre chromatique inférieur ou égal à la taille de sa plus grande clique mineure. La grande différence avec les graphes parfaits est que l'on regarde ici les cliques mineures (donc correspondant à des contractions du graphes) et pas seulement les cliques induites. Cette conjecture fondamentale – qui est aussi une généralisation considérable du théorème des quatre couleurs – ne fournirait cependant pas d'apports algorithmiques directs pour la coloration : en effet, calculer les cliques mineures est également un problème NP-complet ! Cela donnerait cependant des intuitions supplémentaires. C'est d'ailleurs en travaillant sur ce problème (et en résolvant des cas particuliers de la conjecture) que les auteurs se sont mis en quête de la preuve du théorème des graphes parfaits.



L'exemple de K_6 montre que l'on a bien besoin de six couleurs : chaque sommet est adjacent à tous les autres.

Les graphes de Berge

Un graphe G est *parfait* quand le nombre chromatique de chacun de ses sous-graphes induits est égal à la taille de la plus grande clique comprise dans le sous-graphe. En vocabulaire courant, cela signifie que si l'on prend un sous-graphe de G, et que l'on cherche sa plus grande clique, alors il faudra autant de couleurs pour colorier le sous-graphe que pour colorier la clique. Cette propriété confère à un graphe une grande régularité, ce qui explique l'attention qu'ont reçue les graphes parfaits depuis la fin des années 1950.
Certaines classes sont connues depuis longtemps comme étant parfaites, dont les graphes bipartis (et leur compléments) ou les graphes cordaux. L'utilité des graphes parfaits est que de nombreux problèmes réputés difficiles (des problèmes NP-difficiles par exemple) deviennent faciles à résoudre sur cette classe (comme les plus grandes cliques ou plus grands ensembles indépendants, ainsi que le coloriage). Le problème était donc d'identifier et de caractériser ces graphes, ce qui est permis par le nouveau théorème.
Les *graphes de Berge* – d'après le mathématicien et artiste Claude Berge, qui fut l'un des pères de la théorie moderne des graphes et un membre fondateur de l'Ouvroir de littérature potentielle – sont ceux qui ne possèdent ni trou, ni antitrou. Une arête interne dans un graphe est appelée *corde*. Un *trou* est un cycle de longueur impaire supérieure à 5, sans aucune corde. Un *antitrou* est le complémentaire d'un trou.
Ayant introduit ces notions, il remarque qu'un graphe avec un trou ou un antitrou ne peut être parfait et conjecture que les deux définitions sont équivalentes. Il ne dispose pas alors des outils nécessaires à la démonstration (la preuve disponible aujourd'hui fait plus de cent cinquante pages). Tous ces graphes sont par contre fortement reliés aux *graphes cordaux*, qui eux n'ont (par définition) pas le droit d'avoir un cycle sans corde de longueur supérieure ou égale à 4. Les graphes cordaux sont également appelés *graphes triangulés* car on peut décomposer chacun de leurs cycles comme un ensemble de triangles.



Un seul des deux graphes est cordal : le premier (le second possède un cycle induit de longueur 4, qui est ECFD).

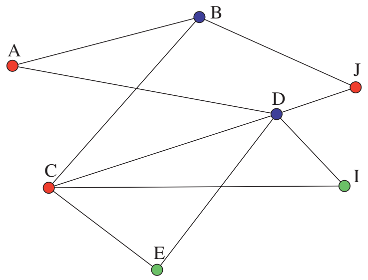
On peut donc reformuler de manière condensée le théorème des graphes parfaits : les graphes de Berge sont exactement les graphes parfaits.

Induits, complémentaires ou adjoints

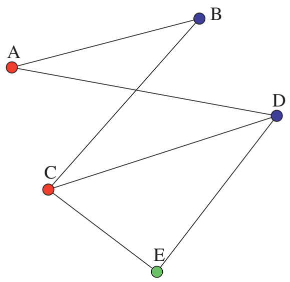
Bien que l'étude des graphes soit relativement récente, un vocabulaire précis a été adopté. Plusieurs notions assez techniques sont nécessaires pour comprendre pleinement le théorème des graphes parfaits. Trois types de graphes interviennent notamment. Tout d'abord, les *sous-graphes induits* sont des sous-graphes dans lesquels toutes les arêtes présentes dans le graphe original subsistent. On enlève donc un ensemble de

001-100 BIB 54:Bibliotheque 54 29/6/15 09:57 Page 65

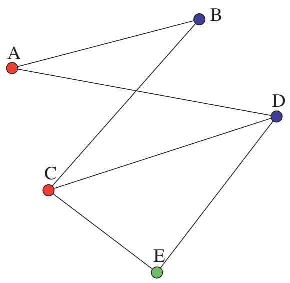
sommets et uniquement les arêtes qui partent de ceux-ci.



Le graphe G.

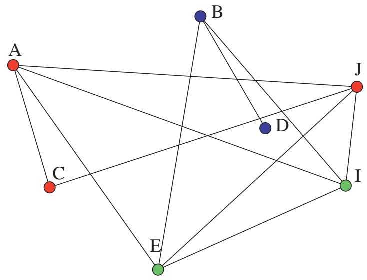


Le graphe ci-dessus, H, est un sous-graphe induit de G (et en particulier un sous-graphe de G).



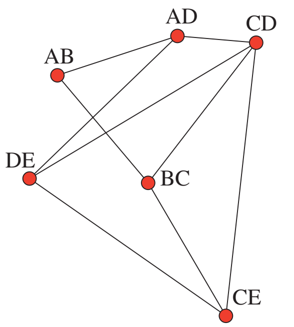
Le graphe ci-dessus, H', est un sous-graphe de G mais n'en est pas un sous-graphe induit.

Le *graphe complémentaire* d'un graphe G est formé du même ensemble de sommets que le graphe original G, et une arête est présente entre deux sommets si, et seulement si, il n'y en avait pas dans G.
Enfin, le *graphe adjoint* d'un graphe G (ou *line graph* en anglais) est formé en



Le graphe G',
graphe complémentaire de G.

prenant les arêtes de G comme nouveaux sommets et en reliant deux tels sommets si les arêtes correspondantes partageaient une extrémité. Bien que faisant partie des plus anciens graphes étudiés, il existe toujours des problèmes ouverts les concernant, notamment sur les itérations de graphes adjoints (comme caractériser l'adjoint de l'adjoint de l'adjoint (…) d'un graphe).



Le graphe H_A représenté ici est l'adjoint du graphe H : chaque sommet correspond à une arête de H.

Une preuve longue, technique mais intuitive

La preuve complète du théorème des graphes parfaits fait intervenir l'étude de nombreux cas particuliers et est très complexe. Il est cependant possible d'en saisir l'intuition générale. L'idée de base est de chercher un « théorème de décomposition », c'est-à-dire une méthode qui

001-100 BIB 54:Bibliotheque 54 29/6/15 09:57 Page 66

Graphes de Berge et algorithmique

Si les graphes cordaux et les graphes de Berge sont intensément étudiés, ce n'est pas uniquement pour leurs beauté théorique intrinsèque. De très nombreux problèmes qu'on ne sait aujourd'hui résoudre qu'en temps exponentiel (et qui, sous des hypothèses raisonnables, pourraient le rester) peuvent être résolus rapidement sur ces classes. En effet, et comme on l'a vu, le nombre chromatique et les tailles des plus grandes cliques peuvent être rapidement déterminés. Cependant, si le fait de reconnaître qu'un graphe est cordal est un problème très simple (cela se fait de manière gloutonne en un temps proportionnel au temps nécessaire pour lire le graphe), le problème de reconnaître un graphe parfait était conjecturé comme difficile, et potentiellement exponentiel lui aussi.

En fait, même après avoir achevé la première version de la preuve, les auteurs n'arrivaient toujours pas à transformer leur théorème de décomposition de façon à obtenir un algorithme de reconnaissance – un procédé naturel dans le domaine. Ce n'est qu'après plusieurs mois de travail intensif (et avec l'aide de Gérard Cornuéjols, Xinming Liu et Kristina Vuškovi) que les auteurs y parvinrent et trouvèrent le premier algorithme rapide de reconnaissance !

Les graphes parfaits ont ainsi une application supplémentaire en programmation linéaire. Dans ce domaine, on cherche à optimiser une fonction donnée en fonction de contraintes, tous les paramètres étant linéaires. Le problème général peut être résolu rapidement car il revient à trouver le « meilleur » sommet d'un polytope convexe de haute dimension, l'inconvénient étant que ce sommet n'est pas toujours à coordonnées entières. Si on se restreint à des coordonnées entières, on se retrouve à nouveau dans un calcul potentiellement exponentiel. L'intérêt des graphes parfaits est que l'on sait que leur polytope convexe associé ne possède que des sommets à coordonnées entières, garantissant des calculs rapides dans tous les cas.

permette de construire tous les graphes de Berge, et seulement ceux-ci. La vraie preuve repose en fait sur un principe légèrement différent : les auteurs prouvent le résultat suivant pour tout graphe de Berge G.

- Ou bien G est construit à partir de certains graphes de Berge plus petits avec une certaine méthode de construction,
- ou bien il possède une propriété qui permet de trouver un graphe de Berge strictement plus petit qui conserve la perfection du premier (ou sa non-perfection).

S'il existe des graphes de Berge qui ne sont pas parfaits, on peut prendre un tel graphe de taille minimale, et se retrouver avec deux possibilités absurdes :

- ou bien il est construit comme précédemment et est parfait,
- ou alors on peut construire un graphe de Berge plus petit et non parfait (ou *imparfait*), ce qui contredit l'hypothèse de minimalité.

Ce qui veut dire qu'il n'existe pas de graphe de Berge imparfait et prouve le théorème !

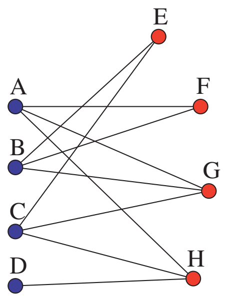
Les auteurs voyaient potentiellement deux méthodes de preuve : une par décomposition, l'autre à base de raisonnements de programmation linéaire, qui avait déjà été essayée sans succès par plusieurs collègues. Un premier résultat prouvé par Alan Tucker était que les graphes de Berge contenant K_4 sont parfaits ; il suffisait donc de montrer le résultat dans le cas simplifié des graphes ne contenant pas K_4. Même si ce problème est en apparence plus simple, il ne déboucha pas, et il fallut repartir de zéro pour trouver une décomposition originale. Après un certain temps, cette idée fut également abandonnée au profit d'une autre approche : la présence d'une décomposition (ou au moins d'une propriété) contredisant la minimalité. Une telle décomposition aurait permis de disposer d'un algorithme de construction des graphes de Berge, ce qui n'existe toujours pas.

La preuve actuelle, dont les grandes lignes sont esquissées ci-après, est beaucoup plus épurée que la première version : l'une des contributions de Maria Chudnovsky a justement consisté à

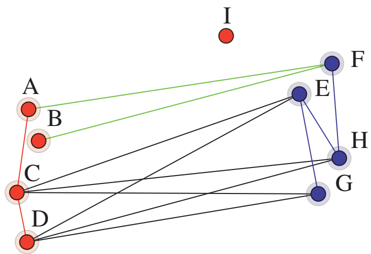
001-100 BIB 54:Bibliotheque 54 29/6/15 09:57 Page 67

réduire le nombre de classes et de méthodes de décomposition. Le long travail des auteurs (deux ans et demi pour la première preuve, cinq ans pour la version simplifiée et l'algorithme de reconnaissance) sera finalement récompensé en 2009 par le prix Fulkerson.
La preuve fait intervenir cinq types de graphes élémentaires dans la décomposition : les graphes bipartis et leurs complémentaires, les graphes adjoints de graphes bipartis et leurs complémentaires, et les graphes fendus doubles (*double split graphs* en anglais). Les *graphes bipartis* sont constitués de deux ensembles de sommets et d'un ensemble d'arêtes allant d'un ensemble à l'autre. Comme il suffit de deux couleurs pour colorier un graphe biparti (vu qu'il n'y a aucune arête à l'intérieur de chacun des deux ensembles), ces graphes sont parfaits. De plus, la plus grande clique présente dans un graphe biparti est K_2 car un ensemble de plus de trois sommets en possède forcément deux dans un même ensemble, et ceux-ci ne peuvent être reliés. Donc un sous-graphe d'un graphe biparti ou bien est dénué d'arêtes (et coloriable avec une unique couleur), ou bien contient une arête, donc K_2, et nécessite deux couleurs. Deux théorèmes de Dénes Kőnig permettent de montrer la perfection des adjoints et complémentaires. Les graphes fendus doubles sont une création des auteurs à partir des *graphes fendus*, ces graphes qui sont par définition simultanément cordaux et complémentaires de graphes cordaux. Les graphes fendus peuvent être décomposés en une clique et un ensemble indépendant, potentiellement reliés par des arêtes. Les auteurs montrent que tout graphe de Berge possède l'une au moins des deux propriétés suivantes :

- il est décomposable en deux sous-graphes H_1 et H_2 tels que les arêtes entre H_1 et H_2 (et leurs extrémités) forment deux graphes bipartis complets ou leur complémentaire,
- il admet une *décomposition oblique équilibrée*, c'est-à-dire une décomposition en deux ensembles E_1 et E_2 tels que E_1 ne soit pas connexe et E_2 soit le complémentaire d'un graphe non connexe, avec des contraintes de taille sur E_1 et E_2.



Un graphe biparti.



Le premier type de décomposition : on a bien deux sous-graphes ABCD et EFGH, et les arêtes entre eux correspondent aux deux graphes bipartis complets (AB:F) et (CD:EGH).

Le point final est un lemme (conjecturé par Vašek Chvátal) disant que tout graphe de Berge imparfait et admettant une décomposition oblique équilibrée n'est pas minimal. La preuve se trouve ainsi… bouclée !

N. K. B.

Références

- *How the proof of the strong perfect graph conjecture was found*. Paul Seymour, *Gazette des mathématiciens* 109, 2006.
- *The strong perfect graph theorem*. Maria Chudnovsky, Neil Robertson, Paul Seymour et Robin Thomas, *Annals of Mathematics* 164, 2006.
- *A characterization of perfect graphs*. László Lovász, *Journal of Combinatorial Theory* 13 (2), 1972.