

Topologie, Géométrie et Bulles

Préparation pour la conférence "De Poincaré à Perelman : une épopée mathématique du 20ème siècle" de G. Besson

N.K. Blanchard

Département d'Informatique
Ens Paris

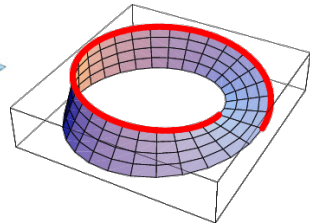
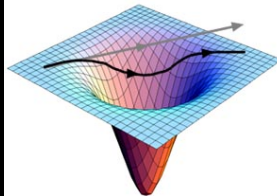
Préconférences au lycée Louis le Grand et à l'École Alsacienne
Vendredi 6 Février 2015

Plan de la Conférence

- 1 Topologie
 - Premières définitions
 - Les graphes
 - En d'autres dimensions
- 2 Géométrie
 - Métrique et Courbure
 - Angles
 - Mesure sur les surfaces
- 3 Bulles et Flots
- 4 Considérations avancées
 - Autres topologies
 - Pour finir

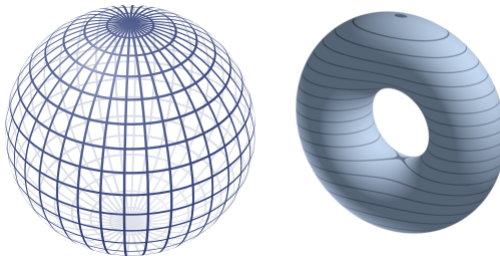
Étude des surfaces

- Surfaces dans un espace 3D
- Courbes dans un plan
- Mais on peut aussi avoir une courbe sur une des surfaces plus étranges



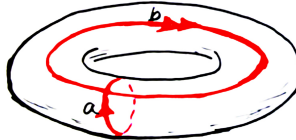
Déformations

- On peut étirer et contracter comme on veut
- On ne peut pas découper ou recoller
- On ne peut donc pas transformer un tore en sphère ou vice-versa



Premières propriétés

- Connexité : de tout point aller vers tout point
- Simple connexité : pouvoir déformer tout lacet jusqu'à obtenir un point
- Les surfaces à trous ne sont pas simplement connexes
- Orientabilité : y-a-t'il un seul "côté" à la surface ?

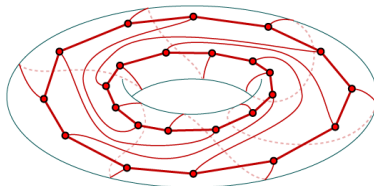


Comment se repérer

- Entre une sphère et un plan : est-ce qu'on revient sur ses pas ?
- Ça ne permet pas de différencier la sphère du tore
- De plus, un cylindre peut être confondu avec une sphère
- Une solution possible : les graphes

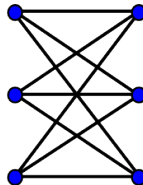
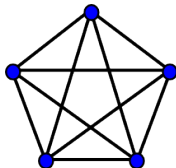
Les graphes

- Un ensemble de sommets
- Un ensemble d'arêtes qui connectent un sommet à un autre
- Un graphe plongé est un graphe dessiné sur une surface tel que les arêtes ne se croisent pas



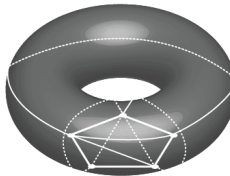
L'énigme des trois maisons

- Deux groupes de 3 sommets, peut-on connecter chaque membre d'un groupe à tous ceux de l'autre ?
- De manière équivalente : peut-on plonger $K_{3,3}$ dans le plan ?
- En fait on ne peut pas, tout comme on ne peut pas plonger K_5 (graphe complet à 5 sommets)



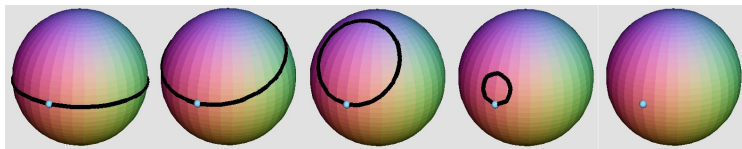
Caractérisation par graphes

- Sont plongeables dans le plan exactement les graphes qui ne se réduisent pas au deux graphes précédent
- Se réduire = on obtient le réduit par contraction et suppression d'arêtes
- On peut caractériser le nombre de trous d'une surface par cette méthode



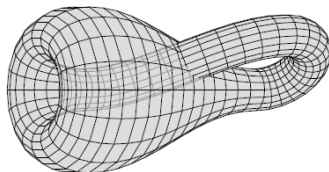
Outil limité

- On ne peut pas distinguer une sphère d'un plan infini
- On colle un bout de plan sur une très grande sphère en le déformant un peu
- On déplace un graphe sur une sphère en déformant pour revenir à une zone ressemblant à un plan



En d'autres dimensions

- Cas simple en 1D : est-on sur un segment, une demi-droite, une droite ou bien un cercle ?
- En dimensions supérieures ? On peut regarder si on revient sur soi-même.
- On ne peut pas les représenter en 3D, du moins pas sans croisement, e.g. bouteille de Klein



Variétés

- On peut facilement définir un espace euclidien à n dimensions
- Toutes les dimensions sont orthogonales et les distances se calculent par $d(x, y) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + \dots + (y_n - x_n)^2}$
- On peut de même définir des espaces qui ressemblent localement à un espace euclidien : les variétés
- Les 3- et 4-variétés sont l'objet de nombreuses recherches car elles pourraient correspondre à la structure de notre univers

Métrie

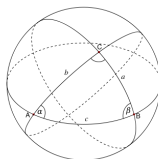
- On veut des notions de distances et d'angles
- Le plus simple : distance Euclidienne
- Mais aussi
 - distance discrète $d(x, y) = 0$ ou 1 selon que $x = y$
 - distance ultramétrique : $d(x, y) \leq \max(d(x, z), d(z, y))$
- Comme avant, la droite entre deux points est la ligne de plus courte distance

Courbure

- Est-on localement proche d'un plan (ou d'une droite en 2D) ?
- Pour cela, on utilise les dérivées secondes
- Plus la dérivée seconde est grande, plus la courbure le sera
- Les sphères ont des courbures positives

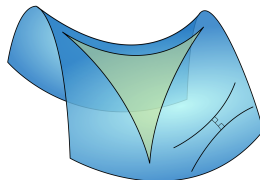
Angles

- Sur une sphère la somme des angles d'un triangle ne fait pas π (180°)
- Au contraire elle varie entre $\pi + \varepsilon$ et $5\pi - \varepsilon$
- On s'en rend compte en déformant peu à peu un triangle sur une sphère jusqu'à obtenir son complémentaire



Angles (suite)

- Comme sur la sphère, les triangles se comportent différemment sur les surfaces hyperboliques, ici leur somme est entre 0 et π
- Surface hyperbolique = surface à courbure négative, par exemple une selle de cheval
- Attention : l'intérieur et l'extérieur d'une sphère ont la même courbure

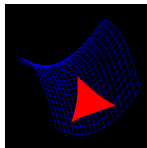


Parallèles

- On a une caractérisation équivalente avec les parallèles :
- Courbure positive :
 - Somme des angles strictement supérieure à π
 - Ayant une droite d et un point x il n'y a pas de droite passant par x ne coupant pas d
- Courbure négative :
 - Somme des angles strictement inférieure à π
 - Ayant une droite d et un point x il y a plusieurs droites passant par x ne coupant pas d
- Courbure nulle :
 - Somme des angles égale à π
 - Exactement une parallèle à d passant par x

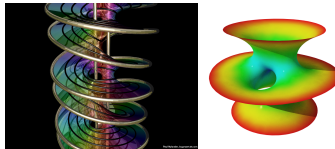
Aire et périmètre

- Sur le plan : théorème d'isopérimétrie : pour toute courbe fermée continue, $p^2 \geq 4\pi A$, avec égalité dans le cas d'un cercle
- Mais sur la sphère un cercle a un périmètre inférieur à $2\pi R$, et une aire inférieure à πr^2
- Sur les surfaces courbes, les triangles ont une aire maximale possible (à la fois en courbure positive et négative)



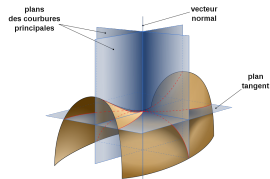
Bulle

- La sphère minimise la surface totale nécessaire pour contenir un volume
- Mais c'est une optimisation globale
- Que se passe-t-il quand on cherche une optimisation locale ?



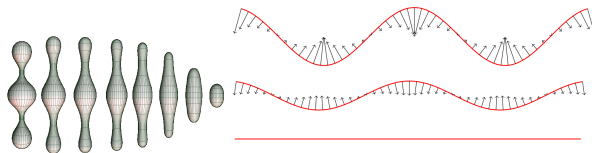
Surfaces minimales

- On a un squelette et on cherche une surface à coller dessus pour qu'à chaque endroit la surface soit minimale
- Le modèle le plus simple se fait avec du savon
- Cela correspond à avoir une courbure moyenne nulle (moyenne de la courbure maximale et minimale en un point)



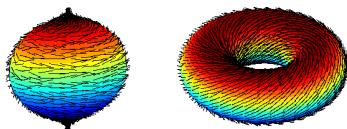
Déformations

- On prend une courbe et on calcule la courbure en tout point, puis on déforme la courbe dans le sens de la courbure pour aplatir, avec une vitesse proportionnelle à l'intensité de courbure
- Cela permet de raccourcir certaines courbes, pour obtenir un point sur un plan
- Les calculs locaux permettent de définir des flots, utiles pour la preuve de la conjecture



Flots

- On peut considérer un champ continu de vecteurs sur une surface
- Théorème de la boule chevelue : une sphère ne peut avoir de flot continu sans épi
- Par contre un tore peut



Conjecture de Poincaré

Théorème

Soit une variété compacte V simplement connexe, à 3 dimensions, sans bord. Alors V est homéomorphe à une hypersphère de dimension 3

- Autrement dit : si un volume n'a pas de bord et est simplement connexe à trois dimensions, on peut le déformer de manière continue pour avoir une hypersphère
- Posée en 1904 par Henri Poincaré, résolue en 2003, 3 médailles Fields ont été accordées à des mathématiciens pour des progrès (Smale 1966, Freedman 1986, Perelman 2006)

Boules

- On définit généralement un espace topologique à partir d'ouverts et de fermés
- Avec une distance, les ouverts peuvent être tous ceux de la forme $\{y | d(x, y) < \alpha\}$ pour un certain α , et leurs unions
- De même les fermés peuvent être $\{y | d(x, y) \leq \alpha\}$
- Il y a d'autres caractérisations possibles

Distances étranges

- Distance discrète donne une topologie discrète : les boules de rayon < 1 sont les points, les autres sont l'espace entier
- Distance entre les mots : s'ils diffèrent à la $d - i^{\text{ème}}$ lettre, ils sont à une distance 2^{-d}
- Dans ce cas on peut définir des topologies sur les formules logiques

Résumé

- Topologie : étude des surfaces à déformation près, il n'est pas évident de trouver sur quelle surface on est
- Géométrie : des considérations métriques pour étudier ces surfaces
- Mélanger les deux peut donner des outils très complexes utilisés en physique, notamment en relativité générale
- On peut utiliser des flots pour étudier ces objets, notamment les flots de Ricci

Pour aller plus loin

- Les deux bons livres d'introduction de Jean-Pierre Petit :
Topologicon et Géométricon, disponibles librement sur internet
- De nombreux livres spécialisés et photocopiés accessibles, par exemple celui de Colin de Verdière
- Des questions ?

(La plupart des images proviennent de wikipédia)